SISTEMAS DIFERENCIALES LINEALES

3.7 Escriba el sistema asociado a las siguientes ecuaciones lineales:

(a) $y''' + 2y'' + y = t$ (b) $y^{(iv)} - y''' + 3y'' + y' = 0$

(c) $y''' + t^2 y' + 3ty = t\cos t$ (d) $y''' + 3e^t y'' + te^t y' = t^2 e^t$

3.8 Compruebe que las siguientes funciones son soluciones del sistema y utilizando el wronskiano decidir, si es posible, su dependencia o independencia lineal en $I\!R$:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& x - z \\ y' &=& 4x - 3z \\ z' &=& 2x - 2z \end{array} \right. \quad X_1 = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ 2e^{-t} \\ 2e^{-t} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+t \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{(b)} \left\{ \begin{array}{lcl} x' &=& -4y \\ y' &=& x \\ z' &=& 0 \end{array} \right. \quad X_1 = \begin{pmatrix} -2\,\text{sen}\,2t \\ \cos 2t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -8\,\text{sen}\,t\cos t \\ 4\cos^2 t - 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

3.9 Hallar la matriz fundamental $\Phi(t) = e^{At}$ de los siguientes sistemas de ecuaciones homogéneos:

$$\text{(a)}\ X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} X(t) \qquad \text{(b)}\ X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X(t)$$

3.10 Halle las soluciones reales de los siguientes sistemas homogéneos tridimensionales, para los que se dan los autovalores de la matriz de coeficientes del sistema

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y \\ y' = x + 2y \\ z' = y + 2z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 3 \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 4x - y \\ y' = 3x + y - z \\ z' = x + z \end{array} \right. \lambda = 2(\text{triple})$$

$$\text{(c)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x - 2y + 2z \\ y' = -2x + y - 2z \\ z' = 2x - 2y + z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = -1(\text{doble}) \\ \lambda_2 = 5 \end{array} \right. \qquad \text{(d)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = 3y + 2z \\ z' = -2y + 3z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_{2,3} = 3 \pm 2i \end{array} \right.$$

$$\text{(e)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - y \\ y' = 3y \\ z' = 2x - 2y + z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 3\ (\text{doble}) \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right. \qquad \text{(f)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 3x - y - z \\ y' = x + y - z \\ z' = x - y + z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1 = 2\ (\text{doble}) \\ \lambda_2 = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{(g)} \left\{ \begin{array}{l} x' = x \\ y' = 2y + z \\ z' = z \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 2 \\ \lambda_2 = 1\ (\text{doble}) \end{array} \right. \qquad \text{(h)} \left\{ \begin{array}{l} x' = 2x + y + 6z \\ y' = 2y + 5z \\ z' = 2z \end{array} \right. \lambda = 2\ (\text{triple})$$

3.11 Resuelva los siguientes problemas de valor inicial:

$$\text{(a)} \left\{ \begin{array}{l} X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} X(t), \\ X(1) = (1, -1, 0)^T \end{array} \right. \qquad \text{(b)} \left\{ \begin{array}{l} X'(t) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} X(t), \\ X(0) = (-1, -1, 0)^T \end{array} \right.$$

3.12 Halle la solución general de los siguientes sistemas no homogéneos por el método de variación de las constantes:

(a) $X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} \operatorname{sen} t \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $X'(t) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 1-t^2 \end{pmatrix} e^{2t}.$

3.13 Transforme el siguiente sistema lineal de segundo orden en un sistema de primer orden y dimensión 4, en las variables x, y, z y u. Halle la solución general de dicho sistema:

$$\begin{cases} x'' = x - y \\ y'' = x + y \end{cases}$$

3.14 Se considera el siguiente sistema definido en $(0, \infty)$:

$$\begin{cases} x' &= & y - \frac{1}{t}z + t \\ y' &= & -x + \frac{1}{t}z - t \\ z' &= & \frac{1}{t}z + t^2 \end{cases}$$

(a) Probar que $\Phi(t) = \begin{pmatrix} 1 & \cos t & \operatorname{sen} t \\ 1 & -\operatorname{sen} t & \cos t \\ t & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz fundamental en $(0, \infty)$.

(b) Hallar la solución general del sistema completo.

(c) Encontrar la solución particular que pasa por el punto $(\frac{\pi}{2}, \begin{pmatrix} -\pi \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$.